

Informatikai kompetenciák: A valós világ modellezése

Dr Szlávi Péter¹, Dr Zsakó László²

¹szlavip@elte.hu, ²zsako@caesar.elte.hu
ELTE IK

Absztrakt: A valós jelenségeket sokszor a modelljeiken keresztül ismerjük meg. Ehhez tisztában kell lenni a modellezés alapfogalmaival, tevékenységeivel, a modellek felhasználásának módszereivel. A megismerésen túl tudatosan használni kell a modelleket valós jelenségek előrejelzésére is! A modellezés informatikán belüli különlegessége, hogy a modellek működtetése is komplex alkotó informatikai folyamat.

Kulcsszavak: modell, szimuláció, informatikai kompetenciák, általános és középiskola.

Az informatikai kompetenciák birtokában az egyén rendelkezik azzal a képességgel, hogy alkalmazni tudja az alapvető informatikai eszközöket és módszereket az ismeretszerzésben és a problémák megoldásában, a mindennapokban, otthon és a munkahelyen. Gyakorlatias módon tudja a tudását alkalmazni új technológiák, módszerek megismerésében és működtetésében, a problémamegoldásban, egyéni és közösségi célok elérésében, valamint az információs társadalom lehetőségeinek ismeretét igénylő döntések meghozatalában. [1, 2]

A fontos informatikai kompetenciák az alábbiak:¹

- Algoritmikus gondolkodás [3]
- Adatmodellezés
- A valós világ jelenségeinek modellezése
- Problémamegoldás
- Kommunikációs készség
- Alkalmazói készség
- Csoportmunka, együttműködő-készség
- Alkotókészség
- Információs tájékozódási és tájékoztatási készség
- Rendszerszintű gondolkodás

A modellezés természetesen nem csak informatikai kompetencia. Modelleket használ a matematika (pl. kiterjedés nélküli pont, végtelen, sőt vastagsággal nem rendelkező egyenes), a fizika (pl. súrlódás és közegellenállás nélkül mozgó test) és más természettudományok is.

A modellezésről, mint matematikai kompetenciáról Blum ezt írja: „*Modelling competence includes the following: to structure, to mathematize, to interpret and to solve problems and it includes as well the ability to work with mathematical models: to validate the model, to analyze it critically and to assess the model and its results, to communicate the model and to observe and to control selfadjustingly the modelling process.*” [4]

¹ Ezen kompetenciák többsége természetesen más műveltségi területen is megjelenik.

Három fontos különbséget azonban meg kell említenünk, ami az informatikát különlegessé teszi a többi tantárgy között:

- az informatikában a modelleket a diákok megalkothatják a valós rendszerek alapján (ez a feladat a matematikában és ritka kivételként még a fizikában előfordulhat [4, 5, 6, 7]²);
- az informatikában a modelleket számítógépes eszközökkel meg is valósítjuk (és sokszor a megvalósítás fontosabb, mint az elkészült modell használata);
- az informatikai modellek használata maga is komplex informatikai tevékenység.

Tehát itt arról van szó, hogy kaptunk egy új eszközt (a számítógépet) a modellek megvalósítására. Emiatt a számítógépes modell adatokból indul ki (amiket a valós világ objektumai tulajdonságai alapján határozunk meg), ebből a számítógépes algoritmus valamit kiszámít, s a kapott eredmények alapján mondhatunk valamit a valós rendszerről. [8]

A megismerésben az egyik leghatékonyabb eszköz a modellezés. Ha valaki képes tisztán, absztrakt fogalmakkal leírni egy folyamatot, amely megmagyarázza a tapasztalatait, akkor jó úton halad afelé, hogy elmondhassa: „megértettem a jelenséget”. A modellt működtetve absztrakt tapasztalatokat gyűjthet, ami kiinduló pontja lehet a valóságban is elvégzendő kísérleteknek, hogy továbbcsiszolja magát a modellt, s így végső soron tudását.

A modellezés egy „sematikus folyamat”, amelyben a következőket kell végiggondolnia a modellt alkotónak. Az első lépésben meg kell határozni a modellben szereplő – absztrakt – objektumokat, amelyek a valós rendszer objektumainak (esetleg objektumosztályainak) „metaforái”. Ezután az absztrakt objektumokhoz hozzárendeljük állapothalmazukat, amelyek valamelyik elemével fognak rendelkezni a működésük során. Majd az állapotváltozás szabályait rögzítjük az ezt leíró algoritmusok segítségével. [9, 10]

Szintjei:

- A valóság modelljeinek megfogalmazása
- A valóság modelljeinek működtetése
- A valóság megértése a modelleken keresztül
- A valóság modelljeinek elkészítése
- A modellalkotás megtanulása
- Valós jelenségek előrejelzése a modell használata alapján
- Modellek elemzése

A matematikai modellezés kompetencia szintjeit kicsit részletesebben fogalmazza meg Herbert Henning és Mike Keune: [11]

Level 1 – Recognize and understand modelling – is characterized by the ability:

- *to recognize and*
- *to describe the modelling process,*
- *to characterize, to distinguish and to localize phases of the modelling process.*

Level 2 – Independent modelling – is characterized by the ability:

- *to analyze and to structure problems and to abstract quantities,*

² A matematikai modellezésről Ambrus Gabriella a következőket írja: „A modellezési feladat megoldása esetében a hangsúly azon a folyamaton eljárás(ok)on van, amelyet a tanulónak kell megtalálnia és végrehajtania ahhoz, hogy egy matematikán kívüli probléma és valamely matematikai tartalom között megfelelő kapcsolatot teremtsen.”

- *to adopt different perspectives,*
- *to set up mathematical models,*
- *to work on models,*
- *to interpret results and statements of models,*
- *to validate models and the whole process.*

Level 3 – Meta-reflection on modelling – is characterized by the ability:

- *to critically analyze modelling,*
- *to characterize the criteria of model evaluation,*
- *to reflect on the cause of modelling,*
- *to reflect on the application of mathematics.*

1. Hol találkozunk a közoktatási informatikában modellezéssel?

Modellezés a közoktatásban több megközelítésben fordulhat elő.

1.1. Adatmodellezés

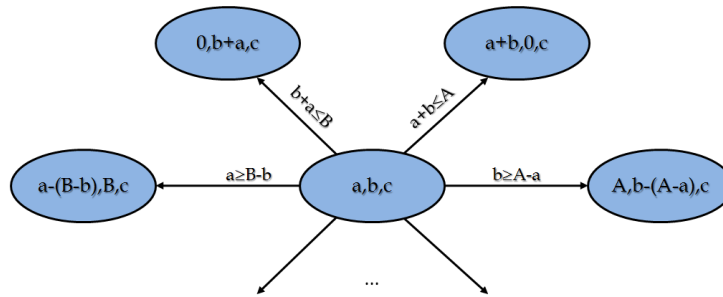
„Adatmodellezésnek azt az absztrakciós folyamatot nevezzük, amelyben a valós (mikro)világ tényeit, valamint a tények közötti kapcsolatokat tükröző adatokat, azok lényeges jellemzőit összegyűjtjük, és ezeket számítógépes adaptálásra alkalmas, szabványok által meghatározott formában, az ún. adatmodellben rögzítjük. Az adatmodellezés nem foglalkozik az adatok konkrét értékeivel, hanem azok belső szerkezetével, és egymás közti kapcsolataival.” [12]

1.2. Problémamegoldás: a problémák modelljei

Problémamegoldás során első lépésként a problémát leíró modellt kell megfogalmazni [13]. Egy diákolimpiai válogatóversenyben (2012) szereplő feladaton keresztül nézzük meg itt a modellezési lépést!

Egy gazdának három különböző űrtartalmú tejeskannája van, amelyekbe teli állapotban A, B és C liter tej fér. A gazda tudja, hogy a kannák közötti öntögetésekkel bizonyos mennyiségű tejet ki tud mérni. Az öntögetések során csak azt kell betartania, hogy tudja, hogy mennyi tej marad abban a kannában, amelyikből tölt és mennyi lesz abban, amelyikbe tölt. Kezdetben mindhárom kannában van valamennyi tej és azt szeretné elérni, hogy az A-literes kannában legyen az eladásra kínált mennyiségű tej. A kimérést a lehető leggyorsabban akarja elvégezni, ezért figyelembe kell vennie, hogy egy áttöltés ideje megegyezik az áttöltött tej mennyiségével. Készíts programot, amely kiszámítja azt a tej mennyiséget, amelynek a kimérése a legtovább tart, és azt is, hogy meddig! [14]

A három kannában kezdetben (a,b,c) liter tej van. Abból önthetünk, amelyik nem üres, abba önthetünk, amelyik nincs tele. Egy öntéskor vagy kiürül az a kanna, amiből öntöttünk, vagy megtelik az a kanna, amibe öntöttünk. Azaz például az (a,b,c) állapotból lehet például (0,b+a,c) vagy (a-(B-b),B,c) állapot. A probléma modellje tehát egy **gráf**, amelynek pontjai a kannák aktuális tejmennyiségét leíró állapotok, élei pedig a szabályos öntések.



1. ábra: A probléma gráf-modellje.

Azaz a probléma modellje itt is adatmodell. Erre az adatmodellre épülhet egy kiszámítási modell, egy algoritmus, amelynek végrehajtásával a probléma bármely kiinduló állapotra megoldható.

1.3. Robotok mint a technikai rendszerek modelljei

Akár az 1-4. osztályban is előforduló feladat robotok (pl. autók) mozgatása. Ezek az autók hasonlítanak a valódi autókra: tudnak előre haladni, tolatni, fordulni jobbra és balra. De különbözhetnek is tőlük, sokszor nem kormányzással fordítjuk őket a megfelelő irányba, hanem a bal- és a jobboldali kerekeket vezérlő motor célszerű be- és kikapcsolásával.

Nagyon hasonló technikai rendszer modelleket használhatunk játékvasutak vezérlésével, közlekedési lámpák kapcsolgatásával.

Informatikában ez a témakör akkor érdekes, ha a robotokat programozni szeretnénk. A robotok valamely érzékelője ekkor a külvilágból érzékelt jeleket adattá alakítja, a programunk ezen adatokból kiszámol valamit, amit felhasználunk a robot vezérlésére.

1.4. Szimulációs modellek

Valós rendszerek működésének megértéséhez gyakran szimulációs modelleket használhatunk [9]. Ezek jellemzője, hogy a valós rendszerekhez működésükben hasonlítanak. Ezek az előző csoporttól abban különböznek, hogy a modellek maguk már számítógépen, azaz a virtuális világban működnek és nem a valóságban. Amíg a technikai modelleknél meg kell építeni a modellt, addig itt programot kell rá írni.

Mit is értünk valójában számítógépi szimuláción? A lényege röviden: olyan modellezése a vizsgált „univerzumnak” (ez alatt akár biológiai, akár kémiai, vagy más természettudományos, sőt közgazdasági mikrovilágot értve), amely diszkrét objektumok sztochasztikus állapotváltozásain nyugszik, s amely egy megfelelő programban ölt testet. A program lesz az az eszköz, amellyel a használó, azaz a kísérletező a modellező elképzeléseit összevetheti a valóságos világ tényeivel.

Érdeemes észrevenni, hogy a szimuláció a szokásosnak mondható absztrakt eszközzel, a matematikai modellezéssel szemben lényeges „előnyvel” rendelkezik. Uí. a komoly absztrakciós tevékenység során nyert matematikai változók között kell valamilyen formális matematikai kapcsolatot találni, ami egy újabb absztrakciós lépés. (Ezt nehezíti az is, hogy a paraméterek, változók számától, kapcsolatuk milyenségétől függően más és más matematikai diszciplína mozgósítandó: a lineáris egyenletektől, egyenletrendszerektől elindulva, a nem lineárisokon át, a közönséges és a parciális differenciál egyenletekig, vagy a sztochasztikus folyamatok eszköztáráig.) Ezzel szemben a szimulációs modellezésben „mindössze” a valós rendszerbeli valódi kapcsolatok „lemásolása” a feladat. További különbség, hogy a modell megőrzi a valós rendszer dinami-

káját, természetességét, a modell lehetőségeit az interakció a környezeti háttér időbeli változtathatósága által tágítja ki.

1.5. Számítógép-modell

Hasznos egy olyan modell, amely a számítógépet, magát modellezi, nyilván azzal a céllal, hogy bemutassa azt, érthetővé tegye működését; s mindezt a megcélzott korosztály számára felfogható szinten. Ilyen modellre mutat példát a [15]. A feldolgozás módjában két „különlegesség” kiemelhető:

1. A modell valójában modellsorozat abban az értelemben, hogy sajátos módon igyekszik követni a számítógépek valóságos „evolúcióját”, vagyis egyfajta történetiséget követ a számítógép-modellek sorjázása során.
2. A modellek túlmutatnak a technikai „újdonságokon”; szervesen érintenek számos „mellékesnek” tűnő dolgot. Így például szóba hozzák a programozás folyamatát, az operációs rendszer szükségességét és szerepét, a párhuzamos számítás egy-két (kisebbség számára is felfogható) problémáját stb.

1.6. Hálózati modellek

A számítógép-hálózatok konkrét fizikai megvalósítását részben elfedik a hálózati topológiák (gyűrű, csillag, ...), amelyek alapvetően gráfokon alapuló modelljei a hálózati struktúrának. [16]

1.7. Kommunikációs modellek

Klasszikus hálózati kommunikációs modell az ISO OSI (Open System Interconnection) modell, amely több szinten írja le számítógép hálózatokban az egyes gépek közötti kapcsolatokat. Ma már nem közvetlenül e modellhez kapcsolódó protokollokat használnak, a kommunikáció megértéséhez, a szükséges feladatok áttekintéséhez ma is nagyon hasznos ez a modell. [16]

1.8. Számítógépes játékok mint a valós világ modelljei

Amíg az 1.4. fejezetbeli szimulációs modellekben az ember, a „játékos” a „mindenható” szerepében vezérli a modellt (állítgatva a modellezett világot jellemző paramétereket), addig a számítógépes játékok esetében többnyire egyenrangú félként avatkozik bele az események menetébe. A számítógépes játékok alatt ez esetben akár egy hálózatos, többszereplős alkalmazást, akár egy „hagyományos” programot érthetünk. A szereplők közt találunk hús-vér embert, vagy embereket, de kell lennie egy gépesített intelligenciának is, „aki” vagy csak közvetítője az emberi résztvevők „üzeneteinek”, vagy valódi játékosként ugyanazon célok eléréséért küzd.

Ezek a játékok a valós világ valamilyen *célból* idealizált modelljei. Lehet a cél egy emberi közösségben érvényesülés, de lehet egy elvont világ több-kevesebb szabállyal szervezett rendszerében való sikeres létezés. Az előbbi fajtájú játékokra példaként számos szerepjátékot megvalósító számítógépes online rendszer említhető (pl. a nevezetes WoW=World of Warcraft), a másik végletként gondolhatunk jó néhány természeti és/vagy társadalmi folyamatot szimuláló, játékos köntösbe bújtatott programra (pl. SimEarth, SimCity, Civilization stb.), sőt idetartoznak a „klasszikus” táblás vagy kártyajátékok számítógépesített változatai is.

Megjegyezzük: a fenti „szociális” játékok ugyan hasonlítanak a valós világra, de sokszor hiányzik belőlük a modellezés hűségére való törekvése, ebben az értelemben tehát nem modellezi annak. Ezek is szimulációk ugyan, de itt *virtuális világokat* alkotunk (amiben az eseményeket, objektumokat úgy hívjuk, mint a valódi világban, talán még hasonlítanak is rá bizonyos szempontból), és a szimuláció abban zajlik. Épp ezért a kapott eredményeknek nem kell köze legyen a valós világhoz. Ennek ellenére hasznos tapasztalatok szűrhetők le belőle.

A számítógépes játékok két ok miatt is említésre érdemesek. Egyrészt a játékos voltuk miatt nagy motiváló erővel rendelkeznek, ezért különösen hatékony oktatási eszközök lehetnek. Másrészt programozási feladatként is felhasználhatók. A tanulók programozási tudásához rugalmasan igazítva fogalmazható meg egy játék ötlete, amelyet a játék volta miatt a tanuló lelkesen megvalósít.

2. A modellezés módszertana

A **szimulációs modellek** és a **technikai rendszerek modelljei** (amelyekkel szintén működést szimulálunk) lehetnek az informatika tantárgyon belül a valós világbeli folyamatok modelljei, a valós világ modellezésében velük fogunk foglalkozni.

Definíció:

A **modell** rendszerint bonyolult, részleteiben nem ismert rendszerek működésének megismerésére készített sematikus elképzelés, amelyből új összefüggésekre lehet következtetni, vagy amely alkalmas arra, hogy a rendszer jelenségei matematikailag leírhatók legyenek. A modell a valódi rendszereknek többnyire csak főbb tulajdonságait tükrözi, egyszerűsített formában. Az, hogy melyek ezek a tulajdonságok, mindig attól függ, hogy miért van szükségünk a modellre.

A következőkben használjuk a **modellezés** és a **szimuláció** fogalmát, mindig aszerint, hogy milyen szempontból beszélünk a modellekről.

Definíció:

Modellezés: A modell elkészítésének folyamata.

Szimuláció: A modell használatának folyamata.

Általános szempontokból **feladatmegoldó tevékenységünket** három részre bonthatjuk, ezek:

- a feladat megfogalmazása,
- a megoldás elkészítése,
- az eredmények értékelése.

2.1. A feladat megfogalmazása

Ez nagyon fontos tevékenység. Ez az, amely meghatározza további tevékenységeink célját, illetve döntően befolyásolja azoknak eredményességét, hatékonyságát. Meg kell adni azt a rendszert, amelynek vizsgálatával foglalkozunk, azokat a szempontokat, amelyeket fontosnak tartunk (paramétereket, illetve ezek értékhalmozait), és a várható eredményeket (hipotéziseinket a rendszer működéséről).³

2.2. A megoldás elkészítése

Feladatok megoldásának, a valóság megismerésének többféle módszerét ismerjük, először ezeket tekintjük át! [9]

Megfigyelés

Törvény- (szabály-) alkotás

³ Várható eredmények: az eredményekről pontos elképzeléseink persze csak bizonyos konkrét paraméterek esetén vannak (ezek megfigyeléseinkből származnak), így minimális elvárásunk, hogy ezen paraméterek esetén a modell is szolgáltassa ezeket az értékeket.

Ez a legősibb megismerési stratégia, melyet már az ősember is „alkalmazott”, lényege abban áll, hogy azt fogadjuk el szabálynak, ami már „sokszor bekövetkezett”. (Ilyen volt „A Nap minden nap felkel.” szabály.) Ez a törvényalkotás ma is elfogadottnak tekinthető, sok megfigyelési eredményből indukció útján hozunk létre új törvényeket.

Megfigyelés

Hipotéziskészítés

Megfigyelés

Törvény- (szabály-) alkotás

A megismerési folyamat itt azzal bővült, hogy kezdeti megfigyeléseink alapján a valós rendszer viselkedésére, állapotára stb. vonatkozó hipotéziseket állítunk fel, majd úgy végzünk további megfigyeléseket, hogy ezt a hipotézist elfogadni vagy elvetni tudjuk (felbukkan a valóság megismerhetőségének fogalma, a célirányos vizsgálódás lehetősége). A hipotézisalkotás két fontos gondolaton alapul, az egyik a természetre vonatkozó kérdések és a kérdésre adandó válaszok önálló megjelenése (a görög tudomány eredménye, kb. az i.e. VI. század körül - a matematika és a természettudományok [fizika] összekapcsolása, a fizika kvantitatív tárgyalásmódja), a másik az absztrakció tudatos alkalmazása. Az absztrakció a jelenség olyan leegyszerűsítése, amely a jelenség alapvető jellegét nem változtatja meg, csupán elvonatkoztat tőle, az egyedi jellemzőket hagyja el, és ezen kívül kvantitatív tárgyalásra alkalmas.

Megfigyelés

Hipotéziskészítés

Kísérletek

Törvény- (szabály-) alkotás

Itt az újdonság a valós rendszerhez való aktív hozzáfordulás. Már nem hagyatkozunk a valós rendszerben esetlegesen végbemenő jelenségek megfigyelésére, hanem előidézük azokat a körülményeket, amelyek esetén a valós rendszer viselkedéséből következtethetünk hipotéziseink igazságára. Az elv nagyon régi, megint visszamehetnénk az ősemberig, illetve az ókori tudományokig; széleskörű tudatos, tudományos alkalmazásáról azonban csak a XVII. századtól beszélhetünk (Galilei tevékenységét emelhetjük ki példaként). Ugyancsak a XVII. század vívmánya az elméletek valósághoz való kötése szükségességének felismerése. Ez azt jelenti, hogy a törvények megalkotásánál a valóságból kell kiindulni, a megalkotott törvényeknek pedig alkalmazhatónak kell lenniük a valóságra. A XX. század újdonsága ezzel kapcsolatban az, hogy az elméletek, a törvényeknek gyakorlati haszonnal is kell járnia.

Megfigyelés

Hipotéziskészítés

Modellkészítés (ha még nem létezik)

Kísérletek a modellel (szimuláció)

Törvény- (szabály-) alkotás

E megismerési módszer szerint a valós rendszer helyett annak csak egy mását, hozzá valamennyire hasonló rendszert vizsgálunk, és ennek viselkedéséből következtetünk az eredeti rendszer viselkedésére. Modellek készítése szintén nem új „találmány”, minden bizonnyal az ősember is készített modellt, itt azonban a modell nemcsak a valóság szótlan mása volt, hanem valamilyen visszahatást is feltételeztek a modelltől a természetre; neves fizikusunk szavaival élve „*az absztrakt nyíllal megölt absztrakt bölény elősegíti az igazi bölény igazi nyíllal való elejtését*”. Az ókori görögök is használtak modelleket, sőt ezt a használatot elég gyakran „túlzásba is vitték”, melynek csúcsa volt talán a Püthagoraszai számmisztika vagy Zénón híres apóriája (para-

doxonja) a teknősről, amelyet a leggyorsabb futó (Akhilleusz) sem tud utolérni. A modellek ilyen vizsgálatában az volt a hiba, hogy a modellből kapott eredményeket nem, vagy nagyon hiányosan vetették össze a tapasztalattal (ha egyáltalán hajlandóak voltak a tapasztalat talajára leereszkedni), sőt a modelleket a valóságtól szinte függetlenül hozták létre. Arkhimédész a maga alkalmazott tudományával szinte kivételnek számított, egyébként általában „vigyáztak” nehogy eredményeiknek gyakorlati alkalmazása legyen, a modellt, a hozzá kapcsolódó logikát tekintették elsődlegesnek.

Megemlíthető érdekességként, hogy a modell megelőzheti a tapasztalatot (egy modellkísérletből származik például az elemi részecskék kvark-modellje). Erre akkor van lehetőség, ha a modell segítségével a valóság magyarázható, de természetesen a modell ilyenkor lehet hamis is (az, hogy magyarázható vele a valóság, még nem a jóság bizonyítéka; ha nem magyarázható, akkor viszont biztosan hibás).

A modern „modellmódszer” azonban nagyon szorosan kapcsolódik a valósághoz, ezzel a kapcsolattal a továbbiakban még foglalkozunk. Az első használható és sikeres modelleket a fizikában alkották meg, ilyen volt az ideális gáz, a tökéletes folyadék, a kiterjedés nélküli tömegpont, a matematikai inga, az atommodellek stb. A fizikát csak sokkal később követte a kémia, a biológia, a földtudományok.

Tapasztalatok gyűjtése megfigyelésekkel

Modell alkotása tapasztalataink megértéséhez

Jóslás a modell segítségével még nem ismert jelenségeket

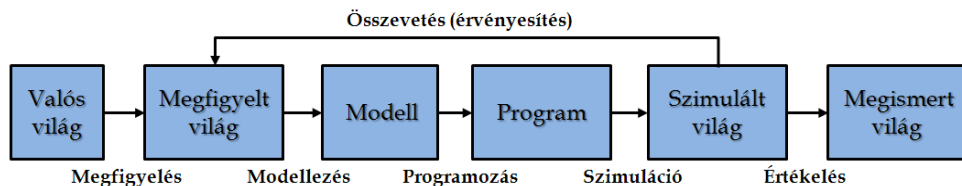
A jóslás helyességét kísérlettel ellenőrizzük, közben megállapítjuk a modell érvényességi határát

Gyakorlati feladatok megoldása a modell segítségével az érvényességi határon belül

Az érvényességi határon túli jelenségek magyarázatához a modell továbbfejlesztése, módosítása, esetleg teljesen új modell kidolgozása [17]

A modellt természetesen ellenőrizni kell. Ami azonban ennél fontosabb: újabb szempontok felmerülése esetén a modellt ki kell bővíteni, át kell alakítani.

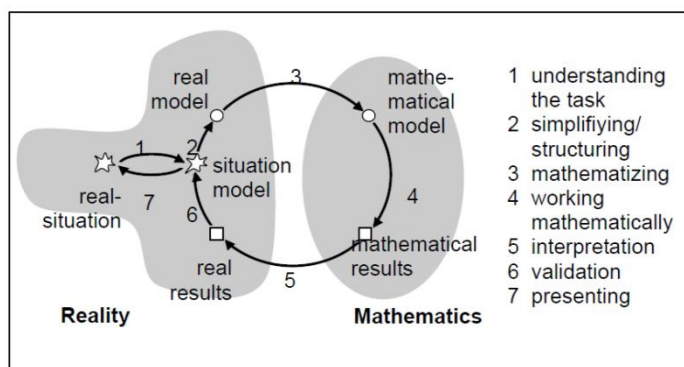
A számítógépes világban nem meglepő, ha ehhez a folyamathoz hozzávesszük a számítógépes modell (program) elkészítését és a „jóslást” a számítógépes modell működtetésével végezzük. Tevékenységünket a következő, objektumokból és rajtuk végzett műveletekből, tevékenységekből álló folyamat jellemzi:



2. ábra: A szimulációs megismerés folyamata.

Megjegyzés: Általános értelemben szokták ezt az egész folyamatot is szimulációnak nevezni.

Hasonló ábrát találhatunk Werner Blum 1996-os cikkében [18], amit azóta is sokan idéznek:



3. ábra: A matematikai modellezés folyamata Blum szerint.

Tevékenységünk minden lépésében meg kell győződnünk, hogy az éppen létrehozott objektum tulajdonságai megfelelnek-e annak, amelyből készítettük, (így pl. a program rendelkezik-e azokkal a tulajdonságokkal, amelyeket a modelltől elvártunk), illetve az egyes objektumok önmagukban való helyességükről. A végső döntést az összevetés (vagy érvényesítés) során hozzuk, ekkor tudjuk egész tevékenységünket értékelni. Amennyiben a szimuláció eredményei megfelelnek várakozásainknak, akkor célunkat elértük; ha nem, akkor meg kell vizsgálni, hogy tevékenységünk melyik lépésében hibáztunk, majd ezt kijavítva, és a javítást a későbbi tevékenységben is elvégezve, újra elkészítjük a fenti objektumokat.

2.3. Modellezés

Modellezéskor a megfigyelt adatok felhasználásával olyan – általában matematikai – módszerekkel írjuk le a rendszert, melyek segítségével a valós rendszer tulajdonságaira következtethetünk, annak viselkedését előre láthatjuk. Ilyen formalizmusra számos példa létezik (közönséges vagy parciális differenciálegyenletek, differenciaegyenletek, véges állapotú automaták, Markov láncok stb.), ezek azonban bonyolult matematikai apparátust igényelnek, így használatuktól a közoktatásban általában eltekintünk.

A modell önmagában sohasem lehet a modellezés célja, hanem mindig a modellezett vizsgálatára kell, hogy alkalmas legyen, ezért a modellnek mindig „működőképesnek” kell lennie. Mielőtt a következő tevékenységbe kezdenénk, meg kell győződni arról, hogy a modell megfelel céljainknak. Ha valamilyen matematikai módszert használtunk, akkor a feladat matematikai megoldását, esetleg rész megoldását elvégezve meg kell vizsgálnunk, hogy a várt eredményt kapjuk-e (ezért volt fontos a feladat kitűzésekor az elvárható eredmények megadása).

Ha a modellünk **szemléltetési** céllal készül, akkor a szemléltetés érdekében megengedhetők a modell belső felépítésére olyan kapcsolatok, amelyek a valódi jelenségben esetleg ilyen formán biztosan nincsenek, mert ilyenkor csak az eredmény a fontos! (Természetesen e kapcsolatok nem érinthetik a modell működésének lényegi mechanizmusát, azaz rossz képzeteket nem sugallhatnak.) Ha a modellünk célja valamilyen **elemzés**, akkor a modellt a valós rendszerre vonatkozó feltevéseink alapján kell elkészíteni, és ilyenkor óvakodni kell a „káros analógiáktól” (így született többek között a *horror vacui* fogalma: amely szerint a testek az ürtől való idegenkedés miatt esnek mindig lefelé)!

A modell megalkotása előtt megfigyelésekkel ismereteket szereztünk, hipotéziseket állítottunk fel a modellezett rendszerben létező objektumokról, ezek kapcsolatairól, állapotairól, változásairól, a külső hatóerőkről, a modellezett rendszer állapotairól.

A szokásos matematikai modellek megalkotása ebben a helyzetben a rendszer paramétereit, állapotváltozói közötti matematikai összefüggés meghatározását jelenti, a konstruktív módszerknél azonban más – könnyebb – úton is járhatunk.

A modellalkotás első lépésében meg kell határozni a modellben szereplő – absztrakt – **objektumokat**, amelyeket meg kell feleltetni a valós rendszer objektumainak (illetve objektumai egy-egy osztályának). Ez a megfeleltetés általában **állapotaik** megfeleltetését jelenti. Ahhoz ugyanis, hogy objektumokról külön-külön beszélhessünk (ahogyan a valós rendszerben), szükség van individuális létezésükre, amelyet állapotaik megadásával helyettesítünk. Ezután következő feladat a rendszer **állapotváltozását** (az objektumok számának változását, állapotainak változását) leíró algoritmus elkészítése.

A matematikai modellek készítésével szembeni lényeges különbség abban van, hogy így nem a már úgyis komoly absztrakciós tevékenység során nyert – matematikai – változók között kell valamilyen matematikai kapcsolatot találni (amely újabb absztrakciós lépés eredménye), hanem a sokkal könnyebben megfogható valós rendszerbeli valódi kapcsolatok „lemásolása” a feladat. További különbség, hogy a modell így megőrzi a valós rendszer dinamikus struktúráját, eseményeit, természetességét.

Modellkészítéskor nagyon sokszor felmerülő probléma megfigyeléseink hiányossága, pontatlansága, sokszor nem kellő céltudatossága. Ez minden esetben elkerülhetetlen akadályt jelent, így egy kicsit foglalkoznunk kell vele. Ha ezekről a hiányosságokról, pontatlanságokról nem vesszünk tudomást, azzal nagy kárt okozhatunk magunknak, s ha a modellel nem csak szemléltetési céljaink vannak, akkor másoknak is.

Az algoritmus akkor írja le jól a valós rendszer működését, ha:

- vesszük a valós rendszer egy tetszőleges állapotát,
- elvégezzük a modellbeli megfeleltetéseket,
- az algoritmus segítségével előállítjuk a modell egy jövőbeni állapotát,
- megkeressük a modellbeli állapot (eredmény) valós rendszerbeli megfelelőjét,
- a kapott eredmény „megegyezik” a valós rendszer valós változása során létrejövő állapottal (determinisztikus esetben egyenlőség, sztochasztikus esetben azonos eloszlásúság).

A modell-modellezett kapcsolat hasonlóság: a modell mindig csak valamilyen szempontból hasonló a modellezetthez. Nagyon fontos ennek a hasonlóságnak a létezése, ez biztosítja ugyanis, hogy a modell állapotának ismeretében a modellezett állapotát meg tudjuk határozni (biztosan vagy nagy valószínűséggel – statisztikus modellek).

„Teljes modell”, azaz olyan, amely minden szempontból hasonló a modellezetthez, csak egy van, maga a modellezett, így a hasonlósághoz mindig meg kell adni, hogy milyen tulajdonságokról van szó, milyen szempontból legyen a modell hasonló a modellezetthez. Előfordulhat azonban, hogy a modellezés csak nagyon durva közelítéssel valósítható meg, ami teljesen bizonytalaná teheti az eredmény használhatóságát, ilyenkor a modellezés csak akkor végezhető el, ha az eredmény helyességét más módon is tudjuk bizonyítani. Ez azonban – ahogyan Hans-Wolfgang Henn is írja – nem baj: *„Models for a real problem can be more or less suitable. One should never talk about “right” or “wrong”. For example, it does not make sense to call Newton’s model of physics “incorrect” and Einstein’s model “correct”.*” [19]

Fontos tulajdonság, hogy a fenti hasonlóság – matematikai nyelven – ekvivalencia reláció. Ebből következik, hogy a modell modellje a modellezettné is modellje, ha azonos elvekkel készítettük, és így egy hosszú elvonatkoztatási folyamatnál is garantálni tudjuk, hogy a valóságról beszélünk. Másik elvárt tulajdonság, hogy a modellezett a saját modelljének modellje, a modell

érvényességét igazolhatjuk, ha belátjuk, hogy a modellbeli események a valós rendszerben is bekövetkezhetnének.

Ezek után nézzük meg, hogy milyen tulajdonságokat várunk el modelljeinktől!

Elfogadhatóság

Egy modellt elfogadhatónak nevezünk, ha a létrehozásához megvizsgált eseményeket reprodukálni lehet vele. Ez alapvető követelmény, ha ez sem teljesül, akkor a modellben komoly hiba van.

Alkalmazhatóság

Egy modellt alkalmazhatónak nevezünk, ha használatából következtethetünk olyan, a valós rendszerben lezajló eseményekre, amelyeket korábbi megfigyeléseinkkel nem tapasztaltunk (de természetesen ott is bekövetkezhetnének, mivel magyarázhatók a valós rendszer keretei között).

Használhatóság

Egy modellt – jól – használhatónak nevezünk, ha a szimuláció paramétereit a természetes jelenség mérhető jellemzőiből kevés és egyszerű transzformáció segítségével kaphatjuk, illetve eredményeiből közvetlenül – vagy szintén elemi átalakítások útján – következtethetünk a jelenség valós jellemzőire.

Teljesség

A modell – mivel a valós rendszerből bizonyos körülmények, környezeti hatások elhagyásával keletkezett – csak a „lehetséges világ” egy megadott tartományában használható. Teljességnek nevezzük ezen tartomány valamilyen mértékét (bár nem állítjuk, hogy ez mindig számszerűsíthető). A teljesség megfogalmazható egyszerű esetben a figyelembe vehető paraméterek számával és értelmezési tartományával.

3. Modellezés korosztályonként

Modellek fejlődése: a korosztályok növekedésével egyre jobban közelítik a valóságot, egyre mélyebbek, strukturáltabbak lesznek.

1-4. évfolyam fejlesztési feladatai

Az első négy évfolyam modelljei a játékvilágból származhatnak: a Lego, a játékautó, a modellvasút természetes modellek a gyerekek számára.

Azaz itt technikai rendszerek modelljeinek alkalmazása (pl. Lego robotok) jöhet szóba. Ezek a modellek első megközelítésben kétfélek lehetnek: mozgó robotok, illetve tárgyakat pakoló robotok.

Mindkét fajta robot első elképzelésben vezérelhető, még minden külvilág érzékelés nélkül. Második lépésként elláthatjuk őket érzékelőkkel, melyek hatására a külvilágtól függően működhetnek (pl. autó ne menjen neki a falnak; kövessen a padlón egy útvonalat; a tárgyakat pakoló robot tudjon különböző magasságú tárgyakra más tárgyakat rakni stb.).

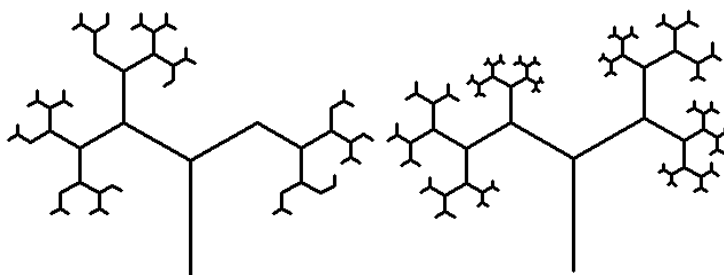
Ezen modellek közös jellemzője, hogy programozhatóak! A programozhatóság sok esetben azonban egy egyszerű összerakó-játék lehet, ahol meglévő programelemekből grafikusán szerkesztjük össze a megfelelő programokat. [20]

5-6. évfolyam fejlesztési feladatai

Itt a valós világ modellezése kétfelé válhat. Egyrészt folytathatjuk a robotok alkalmazását, mint valós rendszerek modelljeit, az előző korosztálynál bonyolultabb feladatokon keresztül, esetlegesen már programozási megoldásokkal is. A modellünk (esetünkben most a robot) valós környezetben működik, reagálnia kell annak minden változására, minden eseményére! A robot itt véges automataként fogható fel: a környezetéből hatások érik, aminek eredményeként állapotkomponenseit megváltoztatja és a környezetére hatást gyakorol.

Másrészt megjelenhet a valós világtól jobban elváló, számítógépes szimulációs modellek köre: itt a számítógéppel valamely jelenséget játszunk le. Ehhez alapvető a számítógépeken létező véletlenszám-generátorok alkalmazása. Egyszerű véletlen jelenségek számítógéppel modellezésével foglalkozhatunk (pl. kockadobás, bolyongás képernyőn, véletlenszerű ábrák előállítás).

Megjegyzés: Fontosnak tartjuk, hogy a szimuláció először véletlen jelenségek – sőt sokszor véletlen játékok – szimulációjaként jelenik meg.



4. ábra: Véletlen Logo-fák.

A szimulációs modell itt még nem a valós rendszerekhez kapcsolódik – legalábbis nem közvetlenül.

7-8. évfolyam fejlesztési feladatai

A robotokkal megoldandó feladatok bővülésével új fogalomra van szükség, ez pedig „a modell modellje”. Bonyolult programokat ugyanis nehéz – időigényes, és időnként még veszélyes is – a robotokkal végrehajtani kipróbálási céllal. Ekkor kerülhet sor a robot szimulációjára számítógéppel. Mítán a szimulációban sokféle robotvezérlést kipróbáltunk, programjainkból a hibákat kiküszöböltük, kerülhet sor a végleges programok kipróbálására a robottal. A robot tehát itt egy valós világbeli objektumnak valamilyen egyszerűsített modellje, a robot-szimulációs program pedig a modell modellje.

Itt előtérbe kerülhet a modellek használata megismerési céllal, azaz a modell működésén keresztül mutatjuk be a valós világ rendszerei működését – a modell már nem csak játék. Elkezdhetjük egyszerű véletlen – és nem csak véletlen – természeti jelenségek modelljeinek számítógépes megvalósítását is!

Ebben a korosztályban tehát a modell a valóság egyszerűsített mása (próbáljuk minél jobban utánozni a valóságot), elsősorban a modell megfogalmazásával és számítógépes megvalósításával foglalkozhatunk.

Kitérő: Akár robotok vezérléséről, akár természeti jelenségek szimulációjáról van szó, az elkészítendő algoritmus (program) szerkezete nagyon különbözik a klasszikus programozás oktatásban először megjelenő programokétól. Hagyományosan egy determinisztikus, szekvenciális végrehajtást feltételezünk, a robot és az interaktív szimuláció pedig a környezeti hatásokra reagál,

eseményvezérelt. A klasszikus programszerkezet szerint a program három részből áll: adatok beolvasása, eredmény kiszámítása, eredmény kiírása. A robotvezérlés és a szimuláció is online algoritmusra épül, azaz kiszámítás közben kapunk újabb adatokat, illetve közlünk eredményeket.

Eigen és Winkler könyve alapján a természeti jelenségek számítógépes szimulációját egy táblajátékként foghatjuk fel [21]. A valós rendszerek, amelyeket modellezni szeretnénk, olyanok lesznek, hogy a rendszer elemei osztályokba sorolhatók, a rendszer állapotát ezen osztályok elemszáma fogja meghatározni, illetve egyes esetekben ezen osztályok térbeli eloszlása, mintázata.

A rendszer egyes egyedei véges sok állapotban lehetnek (diszkrét állapotú modell), s a rendszer elemszáma is mindig véges lesz. Minden egyes egyed jövőbeni (következő időpillanat) állapotát csak a rendszer elemeinek adott időpillanatban meglévő állapota és a rendszer paramétereit határozzák meg. Az egyes egyedekről kell valamilyen információt tárolnunk. Erre a célra táblázatokat használunk: Ha az egyedek térbeli elhelyezkedésére nincs szükségünk, akkor vektort; ha fontos az egyedek közötti szomszédság megállapítása, akkor pedig kétdimenziós táblázatot (mátrixot). A táblázatot valamilyen kezdeti eloszlás alapján – általában véletlenszerűen – kitöltjük. Ezután kezdődhetnek a változások, az „események”.

A jövőbeni állapot meghatározása lehet determinisztikus – ha van direkt kiszámítási szabályunk, illetve történhet véletlen események lejátszása alapján. Utóbbi esetben több kiszámítási szabály is köthető az egyes egyedekhez, megadva azt, hogy mely kiszámítási szabályt milyen valószínűséggel kell alkalmazni.

A valós rendszerek párhuzamosságát kell valamilyen módon átültetni a szekvenciális végrehajtású Neumann-elvű számítógépre. Erre két fő lehetőségünk van:

- Eseményléptetés: az előforduló eseményeket folyamatosan figyeljük, egy időpillanatban 1 (esetleg több) esemény következhet be. Ekkor az alapvető kérdés: hogyan választjuk ki azt az 1 eseményt.
- Időléptetés: az előforduló eseményeket diszkrét időközönként figyeljük; egy időpontban a rendszer minden elemével „történik valami”. Ekkor az események helyes sorrendjének megállapítása a kérdés.

Érdekes lehet a Logo programozási nyelvek tanulók számára megismerkedni a NetLogo szimulációs célú környezettel. [21]

9-10. évfolyam fejlesztési feladatai

A természettudományos szimuláció ebben a korosztályban kiterjedhet az összes természettudományi tantárgyra – biológia, kémia, fizika, földrajz. Természetesen alapvető kérdés: hogy ilyen szimulációval melyik tantárgy foglalkozzon. A válaszuk az, hogy mindkettő (azaz az informatika és a megfelelő természettudományos tantárgy). A szimulációnak van ugyanis olyan része, amely tantárgytól lényegében független, általános sémákat alkalmaz – jó példa erre Eigen és Winkler klasszikus könyve [22]. Ennek megvalósítása elsősorban programozási feladat.

Itt vezethetjük be a véletlen jelenségek szimulációja mellett a determinisztikus jelenségek szimulációját. Ez első lépésként olyan jelenségek időbeli lejátszására épülhet, amelyek megjelenítése is látványos lehet. Egy lehetséges nagyon egyszerű feladatsor: egy pontot mozgassunk a képen adott sebességgel adott irányba; a pont a képernyő széléről szabályosan verődjön vissza; a pont mozgása a súrlódás miatt folyamatosan lassuljon; a pontra lefelé irányuló gravitáció hat; ...

Az ilyen szimulációk alap gondolata: adott valahány alapelem különböző mozgásukra utaló jellemzőkkel. Az időt kis időegységekre osztjuk, s minden elemnek kiszámítjuk a következő ál-

lapotát. Az elemeket a képernyőn a régi helyükről letöröljük, az új helyre pedig kirajzoljuk. Ezután jöhet a következő időegység. (Ez a megközelítés egyébként elvezethet a szimulációs játékokhoz is, ahol például az előző példában említett pontot a játékosnak kell valamilyen eszközzel elfognia.)

A modellek működtetésében a megismerési célt kiegészíti a kísérletezési cél („*mi lenne ha?*” típusú kérdésekkel) [23]. Ez az előzőekkel szemben azonban már az adott szaktárgyhoz tartozik.

Talán a kísérletezésnél is fontosabb e korosztály számára a modellek megalkotása, számítógépes elkészítése. A kísérletezés a szimulációs játékokkal lehet elsősorban élvezetes.

11-12. évfolyam fejlesztési feladatai

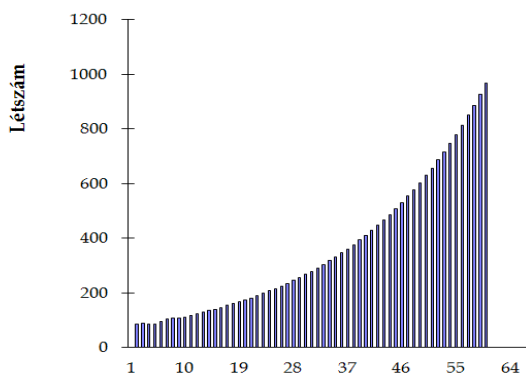
A tantárgyakhoz kapcsolódó szimulációt természetesen érdemes ebben a korosztályban is folytatni, elsősorban az adott tantárgyat emelt óraszámú tanuló osztályokban.

Megjelenhet azonban két, a valós világbeli alkalmazásokhoz sokkal jobban köthető terület:

- Közlekedési rendszerek szimulációja.
- Gazdasági szimuláció.

Ezek érdekes módon sok esetben a számítógépes játékok világából (ügyszéki játékok, autóverseny, stratégiai játékok) nőnek ki.

Ebben a korosztályban a szimuláció újabb célja az előrejelzés lehet, mint az alábbi Leslie mátrixon [24] alapuló demográfiai szimuláció eredményén látható!



5. ábra: Demográfiai előrejelzés Leslie mátrix segítségével.

A fenti ábra – mint a következő is – azt mutatja, hogy itt már elszakadhatunk a szimuláció „szereplőinek” ábrázolásától.

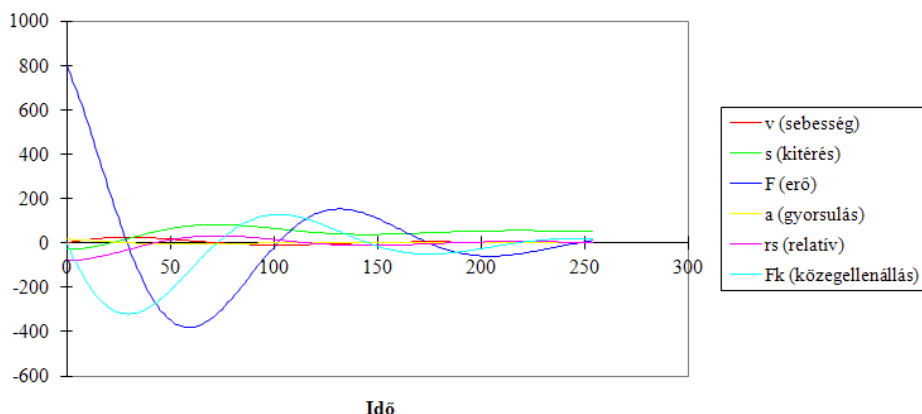
Igen érdekes kísérlet hozható be ebben a korosztályban: a szimulációhoz speciális – nem is mindig erre a célra készült – szoftverrendszerek használata (pl. Geogebra [25, 26] vagy táblázatkezelő [27]).

Az alábbi feladat könnyen megoldható táblázatkezelővel: Egy 0 tömegű, D rugalmassági együtthatójú, „ideális” rugóra helyezett M tömegű test rezgésének szimulációja. Ismert az s_0 kezdeti kitérés, a nehézségi gyorsulás, a k közegellenállási együttható.

A szimuláció alapelve – kicsiny dT időintervallumokat választva, s azzal feltételezéssel élve, hogy dT idő alatt a paraméterek változásai elhanyagolhatóak, a fontos állapotváltozók egyszerűen számíthatók, majd ezekből pl. állapotdiagram rajzolható:

F erő:	$F=F_r+F_k+G$	$F_r=D*s$	$F_k=k*v$	$G=M*g$
a gyorsulás:	$a=F/M$	(rugóerő)	(közegellenállás)	
v sebesség:	$v=a*dT$			
s kitérés:	$s=v*dT$	s_0 kezdeti kitérés:	$s_0=M*g/D \leftarrow M*g=s_0*D$	

Állapotdiagram



6. ábra: Állapotdiagram rugómozgásról.

A modellezési ismeretek fontosságát mutatja, hogy már több éve elindultak a középiskolások számára szóló robotprogramozási versenyek, illetve a hagyományos programozási versenyeken is teret hódít a szimulációs feladatok megoldása.

Az 1992-ben indult Izsák Imre Gyula matematika-fizika-informatika háromtusa versenyen az informatikai feladatsorban rendszeresen szerepel fizikához kapcsolódó szimulációs feladat (pl. mozgás gravitációs térben – 1995; fénytörés és visszaverődés – 1996; ...). [28]

2012-ben a Nemes Tihamér OITV-n és az Informatika OKTV-n is megjelentek az első szimulációs feladatok (közlekedési szimuláció – útkereszteződés, illetve gyalogosátkelő szimuláció), melyek újszerűségük ellenére is a versenyzők kedvenc feladatai közé kerültek, s ezeket sikeresen is teljesítették. [29]

4. Összegzés

Felvetődhet a kérdés, hogy mindezeket az ismereteket miért az informatika tantárgyban kell megtanulni⁴, miért az informatika tanároknak kell megtanítaniuk, s miért nem a fizika-, biológia-, magyar-, ... szakosoknak? Erre részben egy kultúrtörténeti analógiával válaszolhatunk, amely emlékeink szerint Kovács Győzőtől származik:

A keresztény vallás nem magától terjedt el, de nem is a római pápa vagy a 20-30 bíboros szerepe a legjelentősebb benne, hanem azoké a kis kápolnáké és hittérítő papoké, akik eljutottak minden kis faluba, s a vallást a technológiai és kulturális ismeretekkel együtt terjesztették. Az informatika alkalmazásának „hittérítői” az informatika szakos tanárok, akik egyedül lehetnek ké-

⁴ Az csak részben válasz, hogy a Nemzeti Alaptantervben is az informatika műveltségi terület-nél szerepel.

pesek arra, hogy a tanárok további 95 százalékát meggyőzzék arról, hogy az informatikát lehet és érdemes is használni az iskolai tantárgyak széles körében.

Másrészt a modellek nagymértékben sematizálhatók. Arra gondolunk itt, hogy megalkothatók olyan modellkeretek (divatos szóval élve: template-ek), amelyek aktualizálásával lerövidíthető maga a modellezési folyamat is, illetve lehetővé teszi a modellek kvalitatíve viselkedési osztályokba sorolását is. Ennek értelmében szoktunk beszélni különféle elemi modellekről, elemi növekedési modellekről. [9, 21] Úgy gondoljuk, hogy a modellalkotás, és különösen a számítógépes modellalkotás fontos és egyértelműen informatikai terület, emiatt az informatikaoktatásban van a helye.

A számítógépes szimuláció nagy méretű megoldandó feladatokhoz is vezethet, amihez sokszor komoly szaktudományi tanulmányok is szükségesek. Emiatt kiváló lehetőséget adnak a nagyobb méretű csoportokban végzett projektmunkáknak is, amelyben szükség van informatikai tudásra is és szaktárgyi tudásra is.

Irodalom

1. Vass Vilmos (szerk.): *Kompetenciaháló*. Nemzeti Tankönyvkiadó tanulmány, 2009.
2. Szlávi Péter, Zsakó László: *ICT competences – Algorithmic thinking*. Acta Didactica Napocensia, Vol. 5. No. 2. (2012) pp. 49-58.
3. Horváth Győző, Szlávi Péter, Zsakó László: *Informatics (ICT) competencies*. ICAI 2010 – 8th International Conference on Applied Informatics, Eger, Hungary, January 27-30, 2010
4. Werner Blum: ICMI study 14: *Application and Modelling in Mathematics Education-Discussion Document*. Educational Studies in Mathematics, 51, 149-171. 2002.
5. Ambrus Gabriella: *Modellezési feladatok a matematikaórán*. Matematika-Tanári Kincsesládó, B 1.2, RAABE Tanácsadó és Kiadó Kft., Budapest, 2007.
6. Tóth Bettina: *Modellezési feladatok a matematikában*. Szakdolgozat. ELTE TTK, 2010.
7. Vancsó Ödön: *A matematikai modellezés nehézségei egy 2009-es OKTV feladat kapcsán*. A Matematika Tanítása, 2009/9. szám, 30-34.o, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 2009.
8. Sergei Abramovich: *Spreadsheet-Enhanced Problem Solving in Context as Modeling*. Spreadsheets in Education (eJSiE), Volume 1 Iss 1, Article 1. 2003.
9. Horváth László, Szlávi Péter, Zsakó László: *Modellezés és szimuláció*. Mikrológia 1. ELTE IK, 2004.
10. Szlávi Péter, Zsakó László: *Az informatika alkalmazási típusai a közoktatásban*. Informatika a Felsőoktatásban'96 – Networkshop'96, konferencia CD, 534-543, Debrecen, 1996. augusztus 27-30.
11. Herbert Henning, Mike Keune: *Levels of modelling competence*. Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Study Series Volume 10, 2007, pp 225-232
12. Bércesné Novák Ágnes: *Az adatmodellezés szintjei*. <http://www.inf.u-szeged.hu/oktatas/Tempus/abkr2.doc>, 2013.
13. Geda Gábor, Hernyák Zoltán: *Algoritmizálás és adatmodellek*. Kempelen Farkas Hallgatói Információs Központ. http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0038_informatika_Geda_Gabor_Hernyak_Zoltan-Algoritmizalas_es_adatmodellek/ch03.html, 2013.
14. *Informatikai Diákolimpiák válogató versenye*. http://tehetseg.inf.elte.hu/valogatok/valogatok_main.html, 2013.
15. Szlávi Péter: *A számítógépről népszerűsítő stílusban*. Mikrológia 5. ELTE TTK Informatikai Tanszékcsoport, 1998.
16. Andrew S. Tanenbaum: *Computer Networks*. Pearson Education, Inc. Publishing as Prentice Hall PTR Upper Saddle River, New Jersey, 2003.

17. Dr. Huzsvai László: *Kutatói pályára felkészítő akadémiai ismeretkörön alapuló tananyagfejlesztés – Környezet- és természetvédelem ismeretkörben.*
http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0032_kornyezetved_termved_kutatoi/ch02.html, 2013.
18. Werner Blum: *Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, 23, 15-38. 1996.
19. Hans-Wolfgang Henn: *Modelling in school- chances and obstacles.* The Montana Mathematics Enthusiast, ISSN 1551-3440, Monograph 3, pp.125-138. 2007.
20. Peter van Lith: *Teaching Robotics in Primary and Secondary schools.* ComLab Conference 2007, November 30 - December 1, 2007 Radovljica, Slovenia
21. Uri Wilensky: *NetLogo*
<http://ccl.northwestern.edu/netlogo>, 1999
22. Manfred Eigen, Ruthild Winkler: *A játék.* Gondolat, 1981.
23. *Interactive Science Simulations.* University of Colorado at Boulder, PhET project.
<http://phet.colorado.edu/>, 2013.
24. *Age Structured Leslie Matrix.* Virtual Amrita Laboratories Universalizing Education. Amrita Vishwa Vidyapeetham University,
<http://amrita.vlab.co.in/?sub=3&brch=65&sim=183&cnt=1>, 2013.
25. Geda Gábor, Bíró Csaba, Kovács Emőd: *Számítógépes szimuláció GeoGebrával.* INFODIDACT 2011, Szombathely, 2011. 03.31-04.01.
26. Geda Gábor, Bíró Csaba, Tánczos Tamás: *Számítógépes szimuláció lehetőségei.* Agria Media 2011, Eger, 2011.10-12., 426-431.
27. Szlávi Péter, Zsakó László: *Szimulációs modellek táblázatkezelővel.* INF.O.'97 Informatika és számítástechnika tanárok konferenciája, Békéscsaba, 1997. november 20-22.
28. *Izsák Imre Gyula komplex természettudományi verseny.*
<http://www.zmgzeg.sulinet.hu/izsak/>, 2013.
29. *Nemes Tihamér Országos Informatikai Tanulmányi Verseny – Programozás kategória,*
<http://tehetseg.inf.elte.hu/nemes/index.html>, 2013.