

Informatikai eszközök a középiskolai matematikaoktatásban

Zsiros Péter

zsirp@freemail.hu

Absztrakt: Középiskolai matematikanárként informatikai elemeket vontam be munkámba, ennek eredményeiről számolok be. Elsősorban a Maple matematikai szoftverről esik szó, igazoltam, hogy a tananyag döntő részében alkalmazható, kijelöltem a Maple oktatásban felhasználható részeit, oktató segédletet készítettem, többféle tevékenységformában kipróbáltam. Eredmény: A Maple a tanári háttérmunkában, a tananyag megértésében, gyakoroltatásában, s a szakköri munkában is jól használható. Más jellegű informatikai segédeszközöm a tanári honlap, ennek működtetése nagy segítség munkámban. Felépítését és tartalmát tanulói és tanári igények egyaránt alakították, alakítják.

Bevezető

Matematikát és informatikát oktatok középiskolában több mint 18 éve. A Pannon Egyetem doktorandusaként három éve kutatásba kezdtem, kutatási témám a Maple szoftver középiskolai alkalmazhatósága. Elmondhatom, hogy a kutatás jelenlegi állapotában e szoftveren túl több más informatikai eszközt is alkalmazok.

Először a matematikai és az informatikai tudás kapcsolatáról kezdtem gondolkodni. Központi problémám, hogy a matematikaoktatást és a matematikai gondolkodást mennyiben segíti elő, mennyire változtatja meg a számítógép elterjedése. Mára már az informatikai eszközök több területen is bekerültek a matematika tudományába – gondolhatunk itt a négyszínprobléma számítógéppel segített megoldására vagy a matematikai programok kutatásokba való bevonására.

Fontos volt a diákok környezetének elemzése, az összes osztályomban megállapíthattam, hogy a diákok otthon tudnak számítógépen dolgozni, van Internet-hozzáférésük, nem idegenkednek a gép használatától, sőt, többségük szívesen ül a gép elé.

A Maple-lel segített oktatás

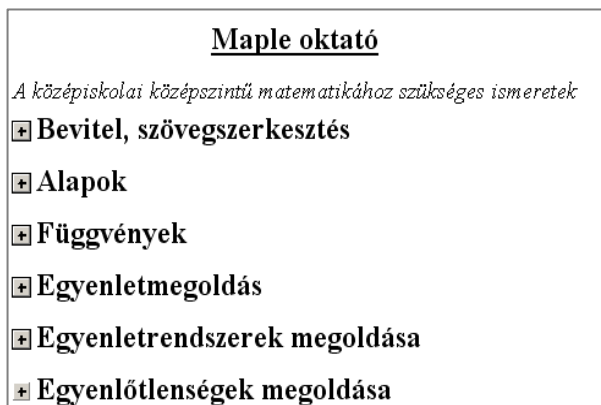
A Maple számítógépalgebrai (CAS) szoftvert eredetileg felsőbb matematikát alkalmazó természettudományos problémák megoldásának könnyítésére tervezték. Egyenleteket, egyenletrendszereket old meg, függvényeket derivál és integrál, sorba fejt és sorösszegeket számol. Síkbeli és térbeli függvényeket ábrázol, differenciálegyenleteket old meg, közelít és határértékeket számol, dolgozik egészekkel, valós és komplex számokkal egyaránt. Bár még számos matematikai területen képes dolgozni (folyamatosan fejlesztik), azért már ennyiből látható, hogy tipikusan a felsőoktatásban és a tudományos munkában használható, s itt valóban régóta használják is.

A Maple szoftver új elem a magyar középiskolai matematikaoktatásban, eddig főként a tehetséggondozásban jutott szerep neki. Külföldön már több helyen alkalmazzák a középiskolai matematikaoktatásban (Franciaország, Németország). Nyugat-Európában azonban a középiskolai tananyagban olyan témakörök szerepelnek, melyek nálunk a felsőoktatásban jelennek csak meg, s az interneten fellelhető anyagok tanúsága szerint főként e témakörökhöz készülnek Maple-segédletek.

A Maple utasításokkal dolgozik, a legújabb verziókba már fejlett képletszerkesztőt integráltak, utasítások paraméterezésével lehet függvényeket ábrázolni – mindezek a funkciók egyszerűen kezelhetők, a tanárok és a középiskolások számára is könnyen elsajátíthatók.

Első feladatként azt kellett körülhatárolni, hogy a Maple mely funkciói alkalmazhatók. A Maple megismerése után el kellett választani a középiskolások számára is érthető, könnyen kezelhető utasításokat a tananyagon túlmutató funkcióktól.

A matematika módszertanát, a NAT-ot, néhány kerettantervet és két tankönyvet tanulmányozva kiválasztottam a Maple-lel segíthető részeket. A Maple használatát olyan szinten sajátítottam el, hogy a középiskolában legjobban használható utasításokat, funkciókat ki tudjam vá-

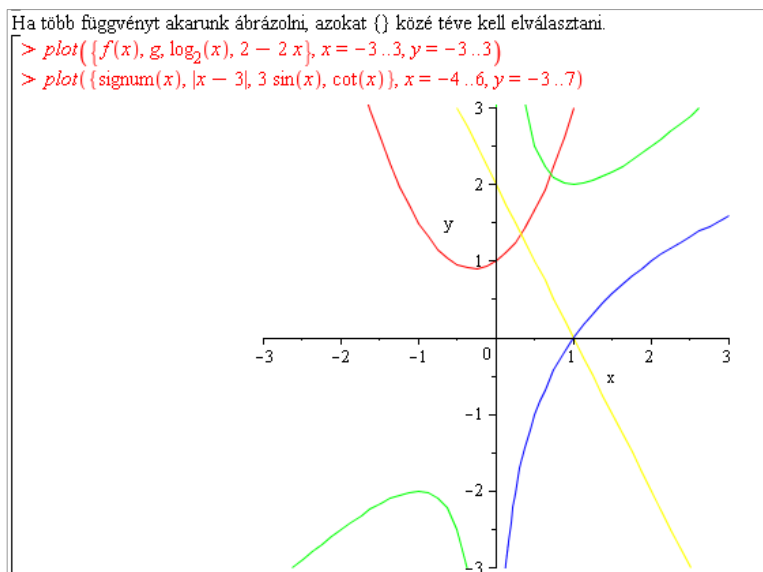


1. ábra A Maple-t oktató segédlet

lasztani. A Maple kiválasztott részeinek használatát oktató segédletet készítettem diákok és tanárok számára.

Négyféle tevékenység vizsgálatát terveztem:

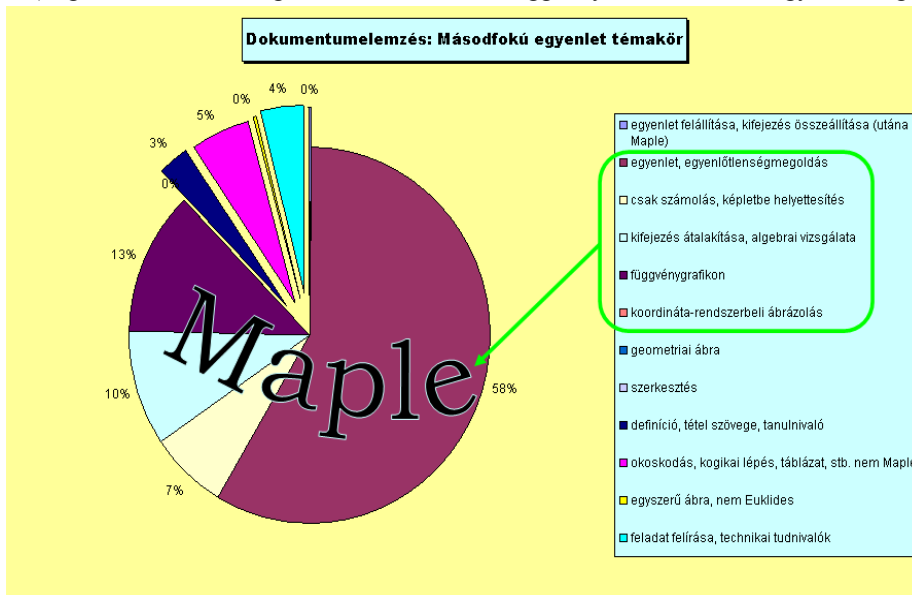
- Maple használata a tanári háttér munkában (dolgozatok összeállítása, ellenőrzés)
- Maple mint látványos szemléltető eszköz
- Maple mint ötlet-inspiráló, szemléltető, számolást könnyítő és ellenőrző eszköz a tehetséges diákok kezében
- Maple mint szemléltető, számolást könnyítő és ellenőrző eszköz a középszintű érettségizők kezében



2. ábra Egy rész a segédletből

Először néhány középiskolát végzett diák matematikafüzetének elemzésével kívántam alátámasztani kutatásom létjogosultságát. E füzetelemzések során kiderült, hogy a középiskolások

írott munkája nagy részben segíthető a Maple-lel. Az itt mellékelt ábra egy tizedikes témakör esetében mutatja, milyen arányban vannak jelen a Maple-lel segíthető részek a matematikafüzetekben. (Segíthető részek az algebrai átalakítások, a függvényábrázolás és az egyenletmegoldás.)



3. ábra Egy diák füzetének vizsgálatából adódó következtetések

A Maple többféle lehetséges használatán kísérleteztem. Először szakkörön mutattam be. A szakkörösöknek elmagyaráztam a szoftver logikáját, megmutattam és odaadtam az oktatófájlt, mindnyájan telepítették a szoftvert otthoni gépükre.

11-12. évfolyamos szakkörre több ízben vittem be a Maple-t, bemutattam a lehetőségeit, s a komplex számok oktatását segitettem vele.

9-10. évfolyamos szakkörön is sokszor dolgoztam a Maple-lel, bemutattam lehetőségeit, polinomok tulajdonságait vizsgáltuk vele, majd a főnix-számok elméletét illusztráltuk Maple-s példákkal.

Tizenkettedikes emelt szintű csoport tapasztalatai

E csoporttal heti 6 órában dolgoztam. A diákoknak *bemutattam tanórai kivetítéssel* a Maple egyszerű funkcióinak működését. Elérhetővé tettem a Maple szoftvert és az általam készített oktatófájlt is.

A koordináta-geometria ismétlésénél több feladatban megtettem, hogy a diákokkal közös *egyenletfelállítás után megoldattam a Maple-lel* a már előre bent levő egyenletet. Ezután írtam be a megoldást füzetbe, s mindenki maga töprenghetett a kapott eredmények értelmezésén, a befejezésen.

Ugyanitt 3-4 fős kiscsoportokban vegyes érettségi feladatokat oldottak a tanulók. Felajánlottam, hogy *segítek Maple-lel a számításokban és függvényábrázolásban.*- csak három csoport kérte ezt a segítséget.

E csoportban kihirdtettem, hogy *elfogadom a házi feladatokat, ha a Maple-lel oldják meg* azokat az egyenletek felállítás után, majd a füzetbe csak a végeredmény értelmezése kerül. A 28 fős csoportból a tanév során mindössze öt tanuló élt vele.

Tapasztalatok kilencedikes csoportban

A következő tanévben kilencedik osztályban heti 4 órában oktattam matematikát, s bizonyos témaköröknél hetenként egy órára bevitettem a Maple-t.

Minden tanuló minden dolgozatát részletes hibaelemzésnek vetettem alá, így a hibatípusok változásából tudtam következtetni a tanulók fejlődésére, érzékenyen reagálhattam az ismétlődő hibákra.

ÉT, ÉK hibás	zérushely hiba	végtelen intervallum hibás felírása	fv.transzf. rossz irányú	hibás tengelyleolvásás	hibás szélsőérték	növekedés-csökkenés hiba	absz.fv. grafikonba belekeveredik	nem alakít át fv. szabályt, úgy ábrázol	Hiperb. ágait másképp transzformálja	értéktáblával ábrázol	nem tudja, melyik tengelyt kell nézni	jelölések használata hibás \emptyset {}{}	nem jelöli a tengelyeket, egységeket	fv. típusok keverése	negatívakkal végzett műv. hibás	hibás ÉT-nyal ábrázol	nem tudja a fv. szabály átalakítást	nyílt-zárt intervallum hiba	bővítés hibás	a-b = -(b-a) hiba	tört előtti mínuszról előjelhiba	beszorzás, kiemelés hibás
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				1						1		1		2		1						1
									1			3	3			1						1
							3			1		3					1					3
										1					1	2	1					1
3	1									2		3				1						
						1	1			1	2			1								2
3								1		2							1					1
2			1	2		1			1													
2			1		2	2			1													

4. ábra Dolgozathibák figyelése - Excel táblázat részlete

A hibák nyilvántartását az Excel szoftverrel végeztem, ez a szoftver a tanári munkában később is többször adott hatékony segítséget.

A kilencedikes diákoknak is bemutattam tanórán a Maple egyszerű funkcióinak működését. Számukra is elérhetővé tettem a Maple szoftvert és az általam készített oktatófájlt.

A Maple-lel támogatott tanórák anyagait, problémáit módszeresen összegyűjtöttem, mind ezt interjúkkal, ellenőrző méréssel tervezem kiegészíteni. Végig alapvetően volt, hogy nem akartam a Maple használatát tananyagként megtanítani és követelni, a diákok maguk dönthettek, akarják-e használni.

1. **Az algebrai témakörökben** az első tanév tapasztalatai alapján a következő módszereket, tevékenységi formákat alkalmaztam :
 - „Drill” feladatokat oldattam meg, először megoldás nélkül mutattam meg a feladatot, majd a megoldást a Maple-lel számíttattam ki. Itt csupán példatárat helyettesített a szoftver, de néhány feladatnál a bemenő adatok gyors változtatására is szükség volt a magyarázathoz – *a megoldás is azonnal változott.*

- Magyarázatot illusztráltam a segédlettel – szorzattá alakításnál és közös nevezőre hozásnál meggyőző a Maple elegáns gyorsasága.
- Ki old meg többet, ki jut tovább? – játékos feladatmegoldó versenyt kezdeményeztem, kivetített, Maple-ben felírt feladatokkal. A leggyorsabbak jutalma volt, hogy a tanuló gépen Entert üthet a megfelelő sorokon, később már táblára írt feladatoknál önállóan billentyűzhetett is a Maple-be.
- Példatári vagy táblára felírt feladat esetében megoldást kértünk a géptől, s az eredmény „kézi” kiszámítását, igazolását kértem a tanulóktól.

▼ **Hatványozás**

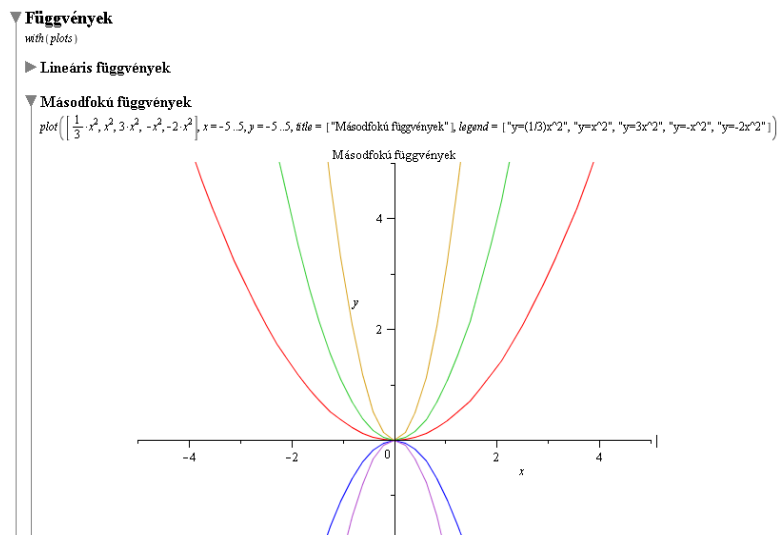
```
> (a*b*c)^4
> (3*a*b/2*c)^4
> x^4*y^5/x^2*y
> (a^4*b^5*a^7)^6
> (5*x^5/y^3)^5 * 7*y/6*x^4
> (6*x)^2*(4*y)^3/(8*x)^4
> (5*a^2)^5*(3*a^3*b^4)^7/(15*a^3*b^3)^6
```

▼ **Műveletek többtagú kifejezésekkel, nevezetes azonosságok**

```
> x*(x+3)
> expand(2*(x+3))
> expand(3*(2*x+5))
> expand(x*(x-6))
> expand(7*(x^2-6*x+2))
> expand(9*(2*x-1))
```

5. ábra Segédlet tanórai munkához

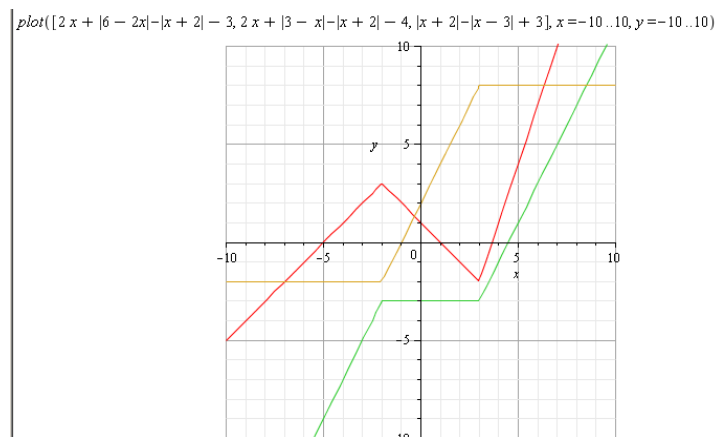
- Egy esetben „játszottuk” azt, hogy a tanulók (megoldott) feladatot készíthettek, bebillentyűzés után egy-egy tanuló a géppel megoldatta a feladatot.
2. **A függvénytan témakörében** a következő módszereket, tevékenységi formákat alkalmaztam (fő cél itt mindig a szemléltetés volt):
- Magyarázatot illusztráltam Maple segédlettel, a „kockás” tábla hiányának pótlására, a



6. ábra Segédlet origó csúcsú parabolák oktatásához

hagyományos táblán való ábrázolást gyorsabban és látványosabban végeztem el. (Az első függvénygrafikont pontról pontra ábrázoltuk, ez még didaktikai okból a táblára került– a tanulók így figyelhették meg a grafikonrajzolás manuális lépéseit, füzetükben ezt a „mozdulatsort” kellett utánózniuk.) E témakörhöz külön oktató segédlet készült, sok animációval, ezt órán használtam és a tanulók számára is elérhetővé tettem. (A segédlet szövegesen is magyaráz, akár tankönyvet is helyettesíthet.)

- Kivetítőn mutattam a Maple-be bevitt feladatot, a füzetben ábrázoltattam, megoldás után ellenőriztük az Enter leütésével, így egy példatárat helyettesítettünk, s interaktivitásra, feladatok módosítására is lehetőség volt.
- Több játékos feladat szerepelt, kivetítettem grafikonokat, s megkérdeztem: melyik függvénynek mi a szabálya? (Először meglévő szabályok párosításával később önálló kitalálással kellett megoldani.)
- Animációval szemléltettem a függvénytranszformációkat –körkörös animáció kivetítése mellett magyaráztam az egyes transzformációs lépéseket.
- Több abszolútértéket tartalmazó függvények grafikonjait vetítettem ki, szabályszerűségek megfigyelése céljából, a szabály változtatásával figyeltük a grafikon módosulását.



7. ábra Több abszolútértéket tartalmazó függvények gyors szemléltetése

3. **A tanulók számára elérhetővé tettem** a Maple-t és az oktató segédfájlt, hogy otthon tovább dolgozhassanak vele. Mindkét témakörben fogadtam el úgy házi feladatokat, ha a Maple-lel oldják meg. Ennek ellenére a tanév alatt egyetlen Maple-s házi feladat-megoldás sem született, mindössze két tanuló telepítette otthon a Maple-t, csak egyikük tekintette át az oktató segédfájlt, tovább azonban ő sem jutott a Maple-lel. Több tanóra után az órán használt Maple segédletet feltettem az Internetre, de egyszer sem töltötte le őket senki.

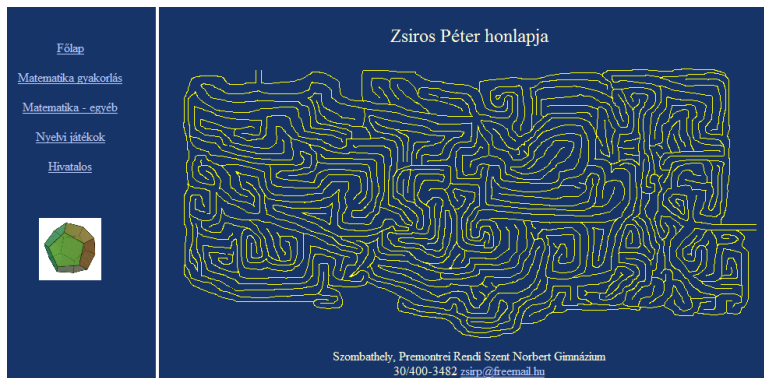
Maple-s tapasztalatok összegzése

- A tizenkettedikes emelt szintű csoportban eleve több matematikára fogékony, műszaki vagy gazdasági érdeklődésű tanuló volt, míg a kilencedikesek még nincsenek annyira céltudatosan elkötelezve a matematika iránt. A szoftvert mindkét csoportban csak a matematika iránt érdeklődő diákok használták. E megfigyelést igazolja az is, hogy a matematika szakkörösök mindegyike telepítette a Maple-t és otthon dolgozott is vele. *A kevésbé motivált, közepes teljesítményű diákok idegenkednek a Maple használatától.*

- *A szemléltetésben igen nagy segítséget nyújt a Maple.* A diákok elmondása szerint a Maple-lel szemléltetett tananyagrészeket könnyen érthetőnek találták, a Maple-s órák légkörét felszabadultabbnak érezték.
- *A tanári munkát sokban segíti a szoftver.* Időt, papírmunkát, előkészületet tudtam vele megspórolni. Felhasznált Maple-s számításaimat, segédleteimet lementettem, s újra fel tudom használni, akár kisebb-nagyobb módosításokra is lehetőségem van.
- Rövid interjúk és a hibastatisztikák elemzése alapján a tanulóknál *mélyebb megértés, árnyaltabb belső reprezentáció* jelei mutatkoztak, de az eredmények hitelesítéséhez még átgondolt és korrekt mérések szükségesek.

Tanári honlap

A jelenlegi tanévben rengeteg osztályt oktatok, így a tanév elején támadt ötletem, hogy egy saját honlapot üzemeltetek, ahol gyakorló feladatokat, dolgozatra való felkészülést segítő anyagokat tárolok. E célra az *uw.hu* ingyenes tárhelyét választottam. Az ötlet bevált, bár nehezen indult be a munka, a hagyományostól eltérő módszert eleinte idegenkedve fogadták a tanulók. A honlapot 2008. novemberétől üzemeltetem.



8. ábra A honlap képe

Kezdetben két fontos segédlet volt elérhető a honlapon. A kilencedikes algebrai azonosságokat gyakoroltató feladatokat a példatárból mind megoldottuk, ezért szükség volt újabb feladatokra. Ráadásul a feladatok közt csak egy-kettő volt azon a nehézségi szinten, amelyiket gyakoroltatni szerettem volna. Így magam írtam feladatokat – természetesen a Maple segítségével.

Ismétlés, készülés az érettségire

Temakörök:

1. Matematikai logika, halmazok, kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika
2. **Algebra:** Nevezetes azonosságok, oszthatóság, algebrai törtek, hatvány, gyök, logaritmus
3. Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, szóveges feladatok
4. **Függvények, sorozatok:** lineáris, abszolútértékes, másodfokú, exponenciális, logaritmus, trigonometrikus – függvénytranszformációk, elemzés, szélsőértékfeladatok, számtani és mértani sorozatok
5. **Geometria:** tételek alkalmazása és számítások háromszögekben, négyszögekben, szabályos sokszögekben, testekben, geometriai transzformációk
6. **Trigonometria:** számítások derékszögű és általános háromszögekben, szóveges feladatok, trigonometrikus egyenletek
7. Vektorok, koordináta-geometria

Kötelező beadni hetenként egy példasor megoldását az *Egységes érettségi feladatgyűjtemény*ből.

Ajánlott feladatok:

1. témakör: Egységes érettségi feladatgyűjtemény

1	54	92	130	166	209	235	2808	2568
13	73	95	135	178	210	273	2824	2576
17	74	96	140	180	214	274	2837	2581
18	75	111	143	185	222	2756	2879	2592

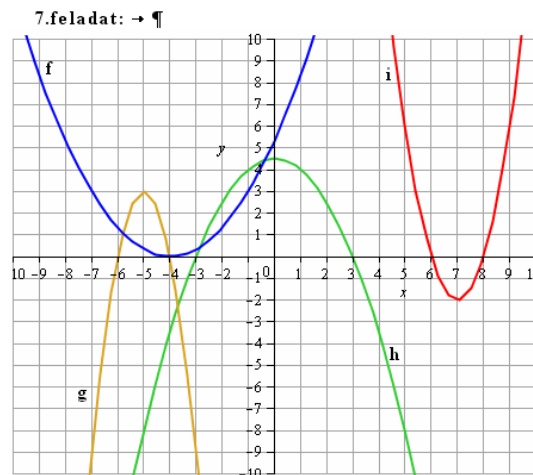
9. ábra Érettségi ismétlés

A másik fontos segédletben a tizenkettedikesek érettségi készülését segítő feladatsorok vannak. Az ismétlés kezdetén felbontottam a tananyagot 7 témakörre. Ezután minden témakörhöz kitűztem feladatokat (átlagosan 60-70 darabot). Ezeket példatári sorszámokkal azonosítottam, s ügyeltem arra, hogy lehetőleg minden feladattípust lefedjek. E fájl a Word-ben készült.

A kilencedikeseknek azt az instrukciót adtam, hogy a feltett feladatok segítik az algebrai témazáróra való felkészülést, a tizenkettedikeseknek pedig házi feladatként minden órára 40 percnyit kellett dolgozni a feltett példákából.

Későbbi bővítések:

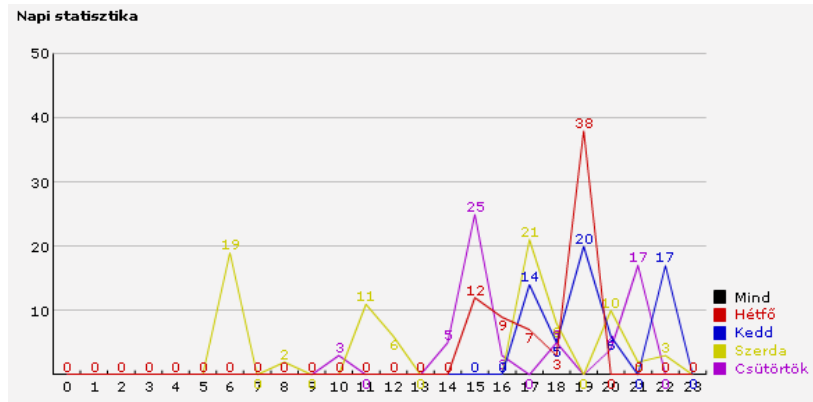
- Tizedikeseknek egyenletmegoldást segítő törtes egyenleteket tettem fel, a Maple-lel készítettem az anyagot, s minden egyenlet mellett a megoldását is beírtam, hogy a tanulók ellenőrizhessék magukat. Így egy kis „digitális példatár” készítettem.
- Ugyanezt tettem meg a tizenkettedikes 1. témakörrel, régebben íratott dolgozataimból szedtem ki a kombinatorikai, valószínűségelméleti és gráfelméleti feladatokat. Később kiderült, hogy ezek a diákok számára nehéz feladatok, szinte mindet végig kellett velük oldani tanórán – néhányan kinyomtatva hozták.
- Felkerült később egy igen érdekes feladatsor is, Maple-lel ábrázolt függvénygrafikonokat tartalmaz, s a diákok feladata a függvényszabály felismerése, a grafikon elemzése. E feladattípus a tanult függvénytípusok és transzformációk elsajátítását méri, annyira hatékonyan, hogy úgy döntöttem, a dolgozatba is teszek ilyen szabályfelismeréses feladatot. Ez annál inkább fontos, mert így egyszerre több függvénytípus transzformációit és elemzését kérdezem ki, a 45 perces dolgozatban nem lenne idő ilyen sok függvényt mind ábrázolni, és elemezni. A Word dokumentumban Maple-lel készített grafikonok láthatók.



10. ábra Függvényfelismerő gyakorlatok

- A honlap második részében, a *Matematika-egyéb* cím alatt lényegében szakköri feladatok találhatók, csak a dokumentumok címeit felsorolva:
 - 9. osztályos feladatok
 - Gyufafeladatok
 - Előadás gráfokról, testekről
 - Érdekes feladatok
 - XII. osztályos szakköri feladatok
- A *Hivatalos* cím alatt egy másik tantárgyam (informatika) információi és egy rosszul sikerült tizenegyedikes trigonometria-dolgozatból kigyűjtött hibák jegyzéke található. Különösen szükségessé teszi a honlap működtetését, hogy egy tanuló gyengénlátó, ő a tanórákat csak hallás alapján, illetve segítő személy folyamatos magyarázata alapján tudja követni. E tanu-

lő bár nem látja a táblát, a számítógép képernyőjéről jól olvas, s az interneten feladott feladatokon keresztül tud készülni a dolgozatokra, az érettségire.



11. ábra A honlap látogatottsági statisztikája

A statisztika tanúsága szerint eleinte napi 1-2 látogató látogatott erre az oldalra. Amikor a tizenkettedikesek házi feladatait ellenőrizni kezdtem, onnantól kezdve lett nagyobb a forgalom. Mostanában átlagosan napi 100 lapletöltést mutat a statisztika (Ez persze nem ennyi felhasználót jelent.)

Az internet egyéb lehetőségei

Két internetes lehetőséget használtok még tizenegyedikes és tizenkettedikes diákjaimmal. Az egyik a **www.om.hu** lapon, azaz az oktatási minisztérium honlapján található gyűjtemény, az eddigi matematika érettségik és javítási útmutatóik adatbázisa. Minden végzős diákomnak minden héten kötelező beadni egy megoldott régi érettségit, s a megoldási útmutató alapján ki is javítottam velük.

A másik internetes lehetőség a **www.realika.educatio.hu** portál, amelynek több célja van. Oktat, ellenőriz, adminisztrál, elvégzendő feladatokat tart nyilván egy biztonságos környezetben. Eddig a kívülről is elérhető oktató segédleteket dolgoztam végig tizenkettedikeseimmel. Sok ábrával és animációval kísért, logikus felépítésű leckék, kidolgozott feladatmegoldások jellemzik az oktató részt. Minden megismert összefüggés után ellenőrző kérdéseket válaszolhat meg a tanuló. A portálon feldolgozott tananyag az alapszintű megértéséhez elég, a négyes-ötös

A szögfüggvények grafikus ábrázolása

Hogyan változik a függvény periódusa?

A szinuszfüggvény periódusa

$y = \sin(2x)$
 $y = \sin(x)$
 $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

00:00 | 00:42

A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin(kx)$ (vagy az ugyanezen halmazon értelmezett $g(x) = \cos(kx)$) függvény periódusa $\frac{2\pi}{k}$, ahol k pozitív szám.

Határozza meg a felsorolt függvények periódusát!

- $y = 2 \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ $\frac{\pi}{2}$
- $y = -3 \cos(2x) + 2$ $\frac{\pi}{4}$
- $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ π
- $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$ 6π
- $y = \operatorname{tg}(4x)$ 1
- $y = \operatorname{tg}(\pi x)$ 2π

Matematika - Középiskola © YDP/Eduweb

12. ábra A realika felülete

szint eléréséhez azonban kevés. Tizenegyedikes és tizenkettedikes diákjaim házi feladatként kapták a téli szünetre, hogy e portál bizonyos témaköreinek oktatóanyagait végigpróbálják.

Az internet használatának tapasztalatai

Tanári gyakorlatomban az internettel segített matematikaoktatás kiállta az idő próbáját, a tanulók megszokták, hogy otthoni munkájuk része lett a számítógép. Saját elmondásuk szerint szívesebben dolgoznak így, mintha csak a hagyományos módon, tankönyvből és példatárból kellene dolgozniuk.

A tanári portál folyamatosan bővül, egyszerűen kezelhető, s a jövőben arra számítok, hogy még többet fog munkámon könnyíteni. A közzétett feladatok elkészítése hatalmas munka lett volna a Maple, az Excel és a Word –de legalábbis ezekhez hasonló- szoftverek hiányában.